فصل سوم

مشتق

17-1-3 تمرین صفحه 192

(1) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را حساب کنید.

(1 $f(x) = 3x + 1$

$$f'(x) = \lim \frac{3(x+h)+1-3x-1}{h} = \lim \frac{3h}{h} = 3$$

(2 $f(x) = \sqrt{3x+4}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+4} - \sqrt{3x+4}}{h} = \lim \frac{3(x+h)+4-(3x+4)}{h\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{x+4}} = 3$$

$$= \lim \frac{3h}{h\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{x+4}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

(3 $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x_0}{x_0^2+1}}{x - x_0} = \lim \frac{2x\,x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x-x_0)\,(x^2+1)\,(x_0^2)}$$

$$= \lim \frac{2x\,x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x-x_0)\,(x^2+1)\,(x_0^2+1)}$$

$$\lim \frac{2(1-x_0^2)}{(x_0^2+1)^2} = f'(x_0)$$

(4 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$$\lim \frac{\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x_0}{\sqrt{x_0+1}}}{x-x_0}=\frac{x\sqrt{x_0+1}-x_0\sqrt{x+1}}{(x-x_0)\ \sqrt{x+1}\ \sqrt{x_0+1}}$$

$$=\lim \frac{x-x_0}{(x-x_0)\ \sqrt{x+1}\ \sqrt{x_0+1}\ (x\sqrt{x_0+1}\ +x_0\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2(x_0+1)\ \sqrt{x_0+1}}$$

(2) با استفاده از تعریب مشتق هر یک را در نقطه داده شده حساب کنید.

(1 $f(x)=5x^2+x$

$$f'(1)=\lim \frac{5x^2+x-6}{x-1}=\lim \frac{(5x+6)\qquad (x-1)}{x-1}=11$$

(2 $x=1 \quad , \quad f(x)=\sqrt{x^2+5}$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\ =`\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-1)\ (\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(3 $x=1 \quad , \quad f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$

$$f'(1)=\lim_{x\to 2} \frac{\frac{x+2}{2x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 2} \frac{1-x}{(x-1)\ (2x+1)}=-\frac{1}{3}$$

(4 $x=1 \quad , \quad f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

$$f'(1) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}}{(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2}{(x+1)\ (2x+1)} = \mathbf{0}$$

(3) در توابع زیر اولاً، پیوستگی تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید $(x=a)$ ثانیاً $f+'(a)$ و $f-'(a)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

(1 $f(x)=\begin{cases} x+2 \quad , & x\le -4 \\ -x-6 \ , & x>-4 \end{cases}$ ، $x=a=4$

$x=a=4$

حل) اولاً تابع در $a=-4$ پیوسته است. ثانیاً $f+'(-4)=-1$ و $f-'(-4)=1$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 \ , \ x<2 \\ \sqrt{x-2} \ , \ x\ge 2 \end{cases}$, $a=2$

حل) اولاً تابع در $a=2$ پیوسته است. ثانیاً $f+'(2)=+\infty$ و $f-'(2)=4$

(3) $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4 \ , \ x<1 \\ x-2 \ , \ x\ge 1 \end{cases}$, $a=2$ پیوسته است و $f+'(1)=1$ و $f-'(1)=6$

(4) اولاً ثابت کنید $f(x)=|x|$ در $x=\mathbf{0}$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

حل) $f(\mathbf{0})=\lim\ f(x)=\lim\ |x|=\mathbf{0}$ پس f پیوسته است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x|-|\mathbf{0}|}{x-\mathbf{0}}=\lim_{x\to 2}\frac{|x|}{x}$$

پس $f_+'(0)=1$ و $f_-'(0)=-1$ است. لذا تابع صفر مشتق ندارد

ثانیاً همچنین برای هر $x \neq 0$ داریم: $f'(x)=\frac{|x|}{x}$

(5) a و b را طوری تعیین کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه داده شده مشتق پذیر باشد.

(1) $$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ ax-b & x\geq 1 \end{cases} \quad , \quad x=1$$

حل) باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد. بنابراین $\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$$\Rightarrow \quad a+b=1$$

از طرفی داریم: $f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ a & x\geq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f_-'(1)=2 \quad = f_+'(1)=a \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a=2 \\ b=-1 \end{matrix}$$

(2) $$f(x)=\begin{cases} ax^2-3 & x<3 \\ bx-6 & x\geq 3 \end{cases} \quad \text{در} \quad x=3$$

حل) شرط پیوستگی را داریم: $\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

$$\Rightarrow \quad 9a+3=3b+6$$

از طرفی داریم: $f(x)=\begin{cases}2ax & x<3\\ b & x\le 3\end{cases}$ **پس داریم**

$$\left.\begin{array}{l} f_-'(3)=6a\\ f_+'(3)=b\end{array}\right. \Rightarrow b=6a \quad \Rightarrow 9a=18a+3$$
$$\Rightarrow -9a=3$$
$$\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$
$$b=-2$$

(6) پیوستگی و مشتق پذیری تابع f را در $x=2$ تحقیق کنید اگر:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3 & x\le 2\\ 8x-11 & x>2\end{cases}$$

حل)

تابع پیوسته است $f(2)=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(8x-11)=5$

از طرفی $f'(x)=\begin{cases}4x & x\le 2\\ 8 & x>2\end{cases}$ پس $f_+'(2)=f_-'(2)=8$

پس تابع در 2 مشتق پذیر است.

(7) در چه نقطه ای از مخفی $y=x^3-3x+5$ ، خط مماس عمود بر $y=-\frac{x}{9}$ است.

حل) باید $y'(x)=9$ باشد پس:

$$3x^2-3=-2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(8) در چه نقطه‌ای از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 + 9 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

(9) معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x-2}$ را در نقطه $A(2\ ,\ 0)$ بیابید.

حل)

$$m = y'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}(2) = +\infty$$

پس $x = 2$ معادله خط مماس است.

18-1-3 تمرین صفحه 193

(1) مشتق پذیری هر یک از توابع داده شده را بررسی کنید.

1) $f(x)=|x^2-1|$, $x_0=1$

حل) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x<1\\ x^{2-1} & x\geq 1\end{cases}$ در نتیجـــــــــــه

$f+'(1)=2$

و $f-'(1)=-2$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

(2) $f(x_0)=4x+1+|x-2|$, $x_0=2$

حل) مشق پذیر نیست چون

$$f(x)=\begin{cases}3x+3 & x<2\\ 5x-1 & x\geq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f+'(2)=5\\ f-'(2)=3\end{matrix}$$

(3) $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$, $x_0=0$

حل)

$$f(x)=|x|\sqrt{x+1}=\begin{cases}x\sqrt{x+1} & x\geq 0\\ x\sqrt{x+1} & x<0\end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست $\Rightarrow \begin{matrix} f+'(0)=1\\ f-'(0)=-1\end{matrix}$

(4) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2(x+1)}$ $x_0=1$

حل)

$$f(x)=|x-1|\sqrt{x+2}=\begin{cases}(x-1)\sqrt{x+2} & x\ge 1\\ (1-x)\sqrt{x+2} & x<1\end{cases}$$
$\Rightarrow f_{+}'(1)=1\ ,\ f_{-}'(1)=-1\Rightarrow$ تابع مشتق پذیر نیست.

5) $x_0=1$ $\quad f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<1\\ 4x-1 & x\ge 1\end{cases}$

حل)

تابع مشتق پذیر نیست چون $f'_{-}(1)=2,\ f'_{+}(1)=4$ است.

6) $x=1$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\quad\Rightarrow f'(1)=+\infty\ \Rightarrow$$ تابع مشتق‌پذیر نیست.

2)فرض کنید $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x} & x>0\\ \dfrac{1+x}{1-x} & x\le 0\end{cases}$. ثابت کنید f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

حل)

$$x > 0 \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_+(0) = -1$$

$\Rightarrow$ تابع مشتق‌پذیر نیست.

$$x < 0 \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} \Rightarrow f'_-(0) = -2$$

(3) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$. ثابت کنید f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است و $f'(1)$ را حساب کنید.

حل)

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \qquad f'_+(1) = 2$$

پس تابع مشتق پذیر است و $f'(1) = 2$ است.

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \qquad f'_-(1) = 2$$

(4) فرض کنید $x \neq 0$ ، $f(x) = (-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}$. آیا f در نقطه ی $x = 0$ مشتق پذیر است؟

حل) زیرا این نقطه در دامنه ی تابع قرار ندارد. تابع پیوسته نیست، پس مشتق پذیر نیست.

(5) درباره ی مشتق پذیری تابع $x \in R$ و $f(x) = x[x]$ بحث کنید.

حل) این تابع در اعداد صحیح مشتق پذیر نیست، چون در این نقاط پیوسته نیست.

در نقطه ی صفر پیوسته است ولی داریم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x[x] - 0}{x - 0} = \lim_{x = 0} [x]$$

که حد اخیر وجود ندارد.

در سایر نقاط اگر $x_0 = n + a$ باشد که $0 < a < 1$ است.

در همسایگی x_0 داریم $f(x)=nx$ پس $f'(x)=n$ که مشتق پذیر است.

(6) فرض کنید تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد و $f(a)\neq 0$. ثابت کنید. $g(x)=[x-1]f(n)$ در نقطه‌ی a مشتق پذیر نیست.

حل)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1x-alf(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1x-al}{x-a}f(a)$$

بنابراین $f'+(a)=f(a)$ و $f'-(a)=-f(a)$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

(7) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر هر نقطه مشتق پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} & |x|\geq 1\\ ax^2+b & |x|<1\end{cases}$$

حل) ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\geq 1\\ -\dfrac{1}{x} & x\leq -1\\ ax^2+b & -1<x<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1'} f(x)=a+b=f(1)=1$$

$$f'+(1)=-1=f'-(1)=2a$$

$$\Rightarrow \quad a=-\frac{1}{2} \qquad\qquad \Rightarrow \quad b=\frac{3}{2}$$

(8) فرض کنید $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$. $f'(1)$ را حساب کنید.

حل)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ -1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\ =1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=1+\frac{p}{4}$$

(9) فرض کنید $f(x)=x(x-1)(x-2)....(x-100)$, $f'(0)$ راحساب کنید.

حل) چون $f(0)=0$ داریم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1).....(x-100)}{x}\ =(-1)(-2)....(-100)$$

$$=100!$$

(10) اگر $f(x)=[x]\sin x$ ، مقدار $f'\left(\frac{p}{2}\right)$ را حساب کنید.

حل) داریم

$$f'\left(\frac{p}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{p}{2}+h\right)-f\left(\frac{p}{2}\right)}{h}=\frac{\left[\frac{p}{2}+h\right]\sin\left(\frac{p}{2}+h\right)-2}{\underset{h\to 0}{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{p}{2}+h\right)-1}{h}=(\sin x)'\left(\frac{p}{2}\right)=0$$

(11) اگر برای $|x|<1$ ، $x\ \le\ f(x)\le x=x^2,$ ، مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) واضح است که $0\le f(0)\le 0$ پس $f(0)=0$ است.

$$\Rightarrow \quad 1 \le \frac{f(x)}{x} \le 1 + x$$

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'_{+}(0) = 1$$

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + x \le \frac{f(x)}{x} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad f'-(0) = 1$$

پس $f'(0) = 1$ است.

(12) مقدار مشتق تابع $f(x) = x|x|$ را در صفر بدست آورید.

حل) داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim |x| = 0 \qquad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

11-4-3 تمرین صفحه ی 247

1) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

1) $y = \sin^5 x \quad \rightarrow \quad y' = 5 \cos x \sin^4 x$

2) $y = (tgx + \cos x)^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3(\sec^2 x - \sin x)(tyx + \cos x)$

3) $y = tg(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x . \sec^2(\sin x)$

4) $y = \sin(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x . \cos(\sin x)$

5) $y = \cos^2(\sin 3x) \quad \rightarrow \quad y' - 6 \sin 3x . \sin(\sin 2x0) \cos(\sin 3x)$

6) $y = 5 \sin(\cos 4x) \quad \rightarrow \quad y' = -20 \sin 4x \cos(\cos 4x)$

7) $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x+3} \quad \rightarrow y'=\dfrac{-2\sin x(\cos x+3)+\sin x(2\cos x-1)}{(\cos x+3)^2}$

$$=\frac{-7\sin x}{(\cos x+3)^2}$$

8) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x-\sin x} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{\cos x(\cos x-\sin x)+\sin x(\sin x+\cos x)}{(\cos x-\sin x)^2}$

$$=\frac{1}{(\cos x-\sin x)^2}$$

9) $y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$$=\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

10) $y=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1} \quad \rightarrow y'=\dfrac{\sec^2 x(\tan x+1)-\sec^2 x(\tan x-1)}{(\tan x+1)^2}$

$$=\frac{2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

2) در هر مورد $y'=\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

1) $x\sin y+y\sin x=xy \qquad y'=-\dfrac{\sin y+y\cos x-y}{x\cos y+\sin x-x}$

2) $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{16}$ $\qquad y'=-\dfrac{\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x}}}{\dfrac{3}{2\sqrt[3]{y}}}=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

3) $y\sqrt{x}-x\sqrt{x}=5$ $\qquad y'=-\dfrac{\dfrac{y}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{y-3x}{4x}$

4) $x^2y+\sin^2 y=y$ $\qquad y=\dfrac{2xy}{x^2+\sin 2y-1}$

(3) مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

1) $y=\cos^{-1}\left(7x^2\right)$ $\qquad y'=-\dfrac{14x}{\sqrt{1-49x4}}$

2) $y=\sin^{-1}(\cos 2x)$ $\qquad y'=-\dfrac{3x^2+2}{\sqrt{1-\left(x^2+2x\right)^2}}$

3) $y=\sin^{-1}(\cos 2x)$ $\qquad y'=\dfrac{-2\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^2 2x}}=-2$

4) $y=\tan^{-1}\left(x^5\right)$ $\qquad y'=\dfrac{5x^4}{1+x^{10}}$

5) $y=\tan^{-1}(\cos x)$ $\qquad y'=\dfrac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$

6) $y=\cos\left(5\cos^{-1}x\right)$ $\qquad y'=\dfrac{-\dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-25\left(\cos^{-1}x\right)^2}}$

7) $y=tg^{-1}\left(\sqrt{x+1}\right)$ $\qquad y'=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}$

8) $y=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ $\qquad y=\dfrac{p}{2}$ $\qquad \Rightarrow\ y'=0$

9) $y=\cos^{-1}(\sin x)$ $\qquad y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=1$

10) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad y'=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=-\dfrac{1}{x^2+1}$

11) $x\sin y+x^2=\tan^{-1}y$ $\qquad y'=-\dfrac{\sin y+2x}{x\cos y+\dfrac{1}{1+y^2}}$

12) $y\sin^{-1}(xy)=\cos^{-1}(x+y)$

$$y'=-\frac{\dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}{\dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\sin^{-1}(xy)+\dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}$$

(4) هرگاه $f(x)=x^3+x$ ، مطلوب است محاسبه $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

حل)

$$y=2 \quad \Rightarrow \quad x^3+x=2 \quad \Rightarrow \quad x^3+x-2=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+2)=0$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$
$$f'(x)=3x^2+1 \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$$

(5) اگر f مسافتی باشدکه متحرک درزمان t طی می کند،مطلوب است محاسبه شتاب $a=\frac{d^2s}{dt^2}$، اگر $s=50+80t+16t^2$ باشد.

حل) $a=32$

(6) اگر $x=t+t^2$ و $y=t+t^3$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در $b=1$ محاسبه کنید.

حل)

$$x=t+t^2=f(t) \qquad f'(t)=1+2t \quad , \quad f''(t)=2$$
$$\Rightarrow$$
$$y=t+t^3=g(t) \qquad g'(t)=1+3t^2 \quad , \quad g''(t)=6t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(1)=\frac{g'(1)}{f'(1)}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}(1)=\frac{g''(1)f'(1)-f''(1)g'(1)}{(f'(1))^3}=\frac{18-8}{9}=\frac{10}{9}$$

(7) اگر $y=3x^2+4x+1$ آنگاه Δy و dy را به ازای $x=3$ و $\Delta x=0/1$ محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = f(3+0/1)-f(3)$$

حل)

$$\begin{aligned}&= 3(3/1)^2+4(3/1)+1-27-12-1\\&= 3(9/61)+12/4-39\\&= 28/83+12/4-39 = 2/23\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&dy = f'(x)\Delta x && \Rightarrow && dy = 22\times 0/1 = 2/2\\&f'(x) = 6x+4 && \Rightarrow && f'(3) = 22\end{aligned}$$

(8) اگر معادله ی حرکت یک ذره $s=20+30t+3t^2$ باشد، سرعت و شتاب ذره را در $t=2$ محاسبه کنید.

$$v=\frac{ds}{dt}=30+6t \qquad \Rightarrow v(2)=42$$

$$a=\frac{d^{2s}}{dt^2}=6 \qquad \Rightarrow a=6$$

(9) اگر $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ ، آنگاه $\frac{dy}{dx}=y'$ را در هر مورد بیابید

$$1)\quad y = f\left(x+\sqrt{x}\right) \qquad\qquad f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$y'=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{2\left(x+\sqrt{x}\right)+1}{2\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)^2+\left(x+\sqrt{x}\right)}}$$

$$2)\quad y = f\left(\cos x+\cot x\right)$$

$$y'=\left(-\sin x-\left(1+\cot^2 x\right)\right)\frac{2\left(\cos x+\cot x\right)+1}{2\sqrt{\left(\cos x+\cot x\right)^2+\left(\cos x+\cot x\right)}}$$

$$3)\quad y = f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \qquad\qquad \Rightarrow y = f\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)$$

$$y'=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\frac{2\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^2+\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)}}$$

$$4)\quad y = f\left(f\left(x^2\right)\right) \qquad\qquad \Rightarrow y'=2xf'\left(x^2\right)f'\left(f\left(x^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow y'=2x.\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^{f}+x^2}}.\frac{2\sqrt{x^4+x^2}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{x^4+x^2}\right)^2+\sqrt{x^4+x^2}}}$$

(10) معادله های خطهای مماس و قائم بر منحنی هر یک از تابع هـای بـه معادلـه ی

زیر در نقطه ای به طول یک واقع بر منحنی را بنویسید.

1) $f(x) = \left(x^2 - 4x\right)^3$

$y = (1-4)^3 = 9$

$y' = 3(2x-4)(x^2-4x) \qquad \Rightarrow y'(1) = 3(-2)(-3) = 18$

$y - 9 = 18(x-1) \qquad \Rightarrow y = 18x - 9$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2-1}$

$y = \dfrac{1+1}{2-1} = 2$

$y' = 2\dfrac{x(2x^2-1) - 4x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

$y - 2 = -\dfrac{3}{2(x-1)} \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)^2}$

$y = \sqrt[3]{(1-2)^2} = 1$

$y = (x^2-2)^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{2}{3} \times 2x(x^2-2)^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y'(1) = -\dfrac{4}{3}$

$y - 1 = -\dfrac{4}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{3}$

4) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$y= f(1)=1+1=2$

$y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad y'(1)=\mathbf{0} \Rightarrow y=2$

11) در تابع به معادله $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ اگر y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم y باشند، ثابت کنید رابطه $2y'^2-yy''=y^4$ برقرار است.

حل)

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2=\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow 2yy'=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow yy'=-xy^4 \qquad \Rightarrow \frac{y'}{y^3}=-x$$

$$\Rightarrow y\frac{y^3-3(y')^2y^2}{y^6}=-1 \qquad \Rightarrow y''y-3(y')^2=-y^4$$

$$\Rightarrow 3(y')^2-yy''=y^4$$

(12 در تابع به معادله $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ ثابت کنید $xy''+2y'=2$

حل)

$$y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$$

$$y'=1-\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{x^2}=1-y'$$

$$y''=\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow xy''=2\left(\frac{1}{x^2}\right)=2(1-y') \qquad \Rightarrow xy''+2y'=2$$

(13) فرض کنید $R\to R$: f,g تابع های مشتق پذیر باشند و $g'(0)\neq 0$ و $f(0)=g(0)=0$ ثابت کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

حل)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-0}{x-0}}{\frac{g(x)-0}{x-0}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

(14) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & x\leq 0\\ \frac{5}{2}x^2-4x & x>0\end{cases}$ تابع مشتق تابع را پیدا کنید.

حل)

$$f'(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 0\\ 5x-4 & x>0\end{cases}$$

15) فرض کنید. $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ (1-x)(2-x) & 1\le x\le 2\\ -(2-x) & x>2\end{cases}$ تابع مشتق تابع را بیابید.

حل)

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & x<1\\ 2-x-(1-x) & 1\le x\le 2\\ +1 & x>2\end{cases}$$

16) مشتق هر یک را تعیین کنید.

1) $y=\dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad \Rightarrow y=\tan x . x^{-\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow y'=\sec^2 x . x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} . \tan x$$

2) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x} \qquad \Rightarrow y'=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\dfrac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}$

$$=\frac{-1}{1+\sin x}$$

3) $y = \sqrt{Arc\cot\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow y' \frac{\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{Arc\cot\frac{x}{2}}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{\left(4+x^2\right)\sqrt{Arc\cot\frac{x}{2}}}$$

4) $y = Arc\tan\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$

$$y' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)}$$

5) $y = Arc\sin\frac{1}{|x|} \quad \Rightarrow y' = \begin{cases} Arc\sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ -Arc\sin\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & x > 0 \\ \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x < 0 \end{cases}$$

$$6)\quad \sin xy+\cos xy=0 \quad \Rightarrow y'=-\frac{y\cos xy-y\sin xy}{x\cos xy-x\sin xy}=-\frac{y}{x}$$

$$7)\quad x\ y=Arctg\frac{x}{y} \qquad \Rightarrow y\tan(xy)-x=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{y^2\sec^2(xy)-1}{\tan(xy)+xy\sec^2(xy)}$$

$$8)\quad x-y=Arc\sin x-Arc\cos y$$

$$Arc\sin x-Arc\cos y-x+y=0$$

$$y'=-\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+1}$$

(17) فرض کنید $f(x)=\sin(n\,Arc\sin x)$. ثابت کنید.

$$(1-x^2)f''(x)-x\ f'(x)+n^2 f(x)=0$$

حل) $Arc\sin$ را دو طرف اثر می دهیم:

$$Arc\sin\ f(x)=n\ Arc\sin x \qquad \text{مشتق} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(f'(x))^2}{1-(f(x))^2}=\frac{n^2}{1-x^2} \qquad \Rightarrow (1-x^2)(f'(x))^2=n^2(1-f^2(x))$$

$$\text{مشتق} \quad \Rightarrow 2(1-x^2)f''(x)f'(x)-2x(f'(x))^2=-2n^2 f'(x)f(x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)f''(x)-x(f'(x))+n^2 f(x)=0$$

(18) فرض کنید $x\in R$ $f(x)=[x]\sin^2 px$. تابع مشتق f رابیابید.

حل) چون $\lim\limits_{x\to n}\sin^2 px=0$ برای هر n صحیح در تمام نقاط پیوسته است.

(19) فرض کنید $f(x)=\left|\left(x^2-1\right)^2(x+1)^3\right|$ تابع مشتق f رابیابید.

حل)

$$f(x)=\left|\left(x^2-1\right)^2(x+1)^2(x+1)\right|$$

$$=\left(\left(x^2-1\right)^2(x+1)^2(x+1)\right)^2 \mid x+1$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\left(2x(x+1)+\left(x^2-1\right)\right)\left(\left(x^2-1\right)(x+1)\right)\mid(x+1)\mid$$

$$+\left(\left(x^2-1\right)(x+1)\right)\frac{|x+1|}{x+1}$$

(20) فرض کنید $f:R\to R$ ، n مرتبه مشتق پذیر باشد. ثابت کنید.

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$$

حل) با استقرا روی nاین مطلب را نشان می دهیم:

$$n=1 \qquad \Rightarrow (f(ax+b))'=af'(ax+b)$$

$$k=n \qquad \Rightarrow (f(ax+b))^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$$

با مشتق گیری از دو طرف فرض داریم:

$$[f(ax+b)]^{(n+1)} = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b)$$

پس حکم برقرار است.

(20) در هر مورد مشتق مرتبه nام تابع داده شده را به دست آورید.

$$1)\quad y=\sin x \qquad \Rightarrow\ y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$2)\quad y=\cos x \qquad \Rightarrow\ y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$3)\quad y=\sin^2 x \ \Rightarrow\ y^{(n)}=\sin 2x\left(x+n\frac{p}{2}\right)\ \Rightarrow\ y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left(2x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$4)\quad y=\cos^2 x \qquad \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{1}{2}\times 2^n\cos\left(2x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$5)\quad y=\frac{1+x}{1-x} \qquad y'=\frac{-2}{(1-x)^2}\quad,\quad y''=\frac{4}{(1-x)^3}$$

$$y'''=\frac{-12}{(1-x)^4}\quad,\quad y^{(4)}=\frac{48}{(1-x)^5}$$

$$\ldots\ldots y^{(n)}=(-1)^n\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(22)مقادیر c,b را طوری تعیین کنید که نمودار $y=x^2+bx+c$ در نقطه $A(1,1)$ بـر خط $y=x$ مماس باشد.

حل) $(1\,,1)$ روی نمودار قرار داردپس $1=1+b+c$

از طرفی شیب برابر 1 است پس داریم $1=2+b$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ \\ b=-1 \end{cases} \qquad \rightarrow \quad c=1$$

23) در چه نقـاطی از منحنـی $y=x^3+x-2$ خـط ممـاس بـر منحنـی مـوازی حـط $y=4x-1$ است؟

حل) باید $y'(x)=4$ باشد پس

$$3x^2+1=4 \qquad \Rightarrow 3x^2=3 \qquad \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

24) معادلــه ی ممــاس بــر منحنــی $y=x^3+3x^2-5$ را بنویســید کــه بــر خــط $2x-6y+1=0$ عمود باشد.

حل) $6y=2x+1 \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$

پس شیب خط داده شد برابر $\frac{1}{3}$ است لذا شیب خط مماس برابر -3 است پس

$$3x^2+6x=-3 \Rightarrow x^2+2x+1=0$$
$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=-3$$
$$y'(-1)=3-6=-3 \Rightarrow y+3=-3(x+1) \Rightarrow y=-3x-6$$

(25) در مورد تابع $f:R\rightarrow R$ میدانیم $|f(x)|\le x^2, x\in R$ ثابت کنید f در $x=0$ مشتق پذیر است $f'(0)$ رابیابید.

حل)

$$f(x)| \le x^2 \Rightarrow \ |f(x)| \le |x|^2 \quad \Rightarrow \quad -|x| \le \frac{f(x)}{x} \le |x|$$
$$\Rightarrow \ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le |x|$$

از طرفی داریم: $\lim(-1x1) = \lim 1x1 = 0$ **پس**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f-(x)-0}{x-0} = f'(0) = 0$$

26) در مورد تابع $f: R \to R$ می دانیم $\Rightarrow -1x1 \le \frac{f(x)}{x} \le |x|$ $\quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le |x|$ آیا می توانیم نتیجه بگیریم که f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است؟

حل) خیر؛ مثلاً $f(x)=|x|$ را در نظر بگیرید این تابع در $x=0$ مشتق ندارد.

27)اگر $f(x)=[x]\sin x$ مقدار $f'\left(\frac{p}{4}\right)$ را حساب کنید.

حل) چون $0<\frac{p}{4}<1$ است پس $f\left(\frac{p}{4}\right)=0$

$$f'\left(\frac{p}{4}\right) = \lim_{x\to\frac{p}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{p}{4}\right)}{x-\frac{p}{4}} = \lim_{x\to\frac{p}{4}}\frac{[x]\sin x}{x-\frac{p}{4}} = 0$$

28)اگـــــر $f: R \to R$ یـــــک تـــــابع و $f'(a)$ موجـــــود باشـــــد، حاصـــــل

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ را حساب کنید.

حل)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$
$$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)$$

29) اگر به ازای $|x|<1$, $x\le f(x)\le x+x^2$ مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) با توجه به نا مساوی داریم: $0\le f(0)<0$ پس $f(0)=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

زیرا $1\le\dfrac{f(x)}{x}\le 1+x$

30) اگر $f(a)=0$, $f'(a)=4$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{5h}$ را حساب کنید.

حل)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}=\frac{2}{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}$$
$$=\frac{2}{5}f'(a)=4\Rightarrow f'(a)=10$$

31) اگر f بر R دو مرتبه مشتق پذیر باشد و $g(x)=f(xf(x))$ آنگاه $g''(0)$ را

حساب کنید.

حل)قرار دهید:

$$
\begin{aligned}
&u(x)=xf(x)\Rightarrow u(0)=0\\
&u'(x)=f(x)+xf'(x)\Rightarrow u'(0)=f(0)\\
&g(x)=f(u)\Rightarrow g'(x)=u'\quad f'(u)\\
&g''(x)=u''f'(u)+(u')^2 f''(u)\\
&\Rightarrow g''(0)=2f'(0)f'(0)+(f(0))^2 f''(0)\\
&\Rightarrow g''(0)=2(f'(0))^2+(f(0))^2 f''(0)
\end{aligned}
$$

۳۲)اگر توابع f و g بر R مشتق پذیر باشند و

$$2g'(-2)=f(a)=f'(a)=-2$$

مقدار $(g\circ f)'(a)$ را حساب کنید.

حل)

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)'(a)&=g'(f(a)).f'(a)\\
&=g'(-2).(-2)=(-1)(-2)=2
\end{aligned}
$$

(33) اگر $\begin{cases}x=(t+2)^2\\ y=t^3\end{cases}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را به ازای $t=3$ حساب کنید.

حل)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2(t+2)}\Rightarrow\frac{dy}{dx}(3)=\frac{27}{2\times5}=\frac{27}{10}$$

(34) اگر $f'(1)=f(1)=-2$ و $g'(-2)=3$ ، حاصل $(g\circ f)'(1)$ را حساب کنید.

حل)

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)$$
$$=g'(-2)\cdot(-2)=3\times(-2)=-6$$

(35) اگر f تابعی مشتق پذیر در a باشد. مقدار $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ را حساب کنید.

حل) مقدار $xf(x)$ را به صورت اضافه و کم کنید:

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-xf(x)+xf(x)-af(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)\frac{x-a}{x-a}-x\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=f(a)-af'(a)$$

(36) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری بـه معادلـه $\begin{cases}x=t^2-1\\ y=\sqrt{t^2+1}\end{cases}$ در $t=2$ را حساب کنید.

حل)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d_y}{d_t}}{\frac{d_x}{d_t}}=\frac{2t}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}$$
$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}(2)=\frac{4\times\sqrt5}{2}=2\sqrt5$$